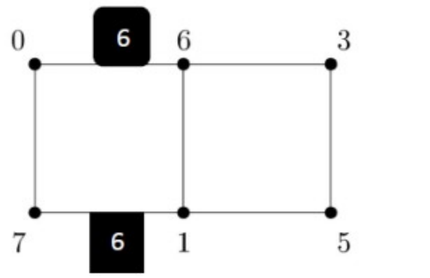
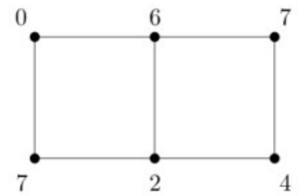
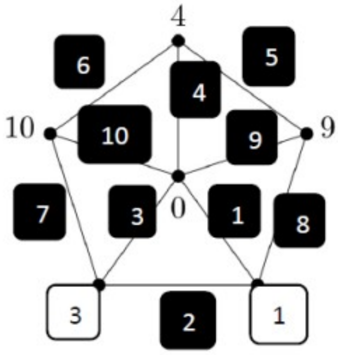
Corrigé

Étiquetage gracieux d'une figure

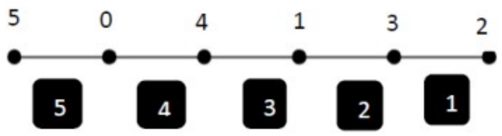
A. Des exemples

1. 		**2.** 
Etiquetage non gracieux (deux pondérations identiques)	Etiquetage non gracieux (étiquetage avec deux « 7 »)	

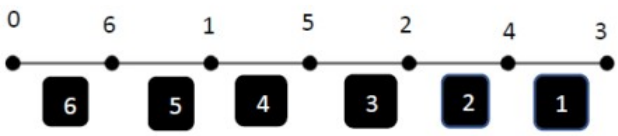
B. Cas des lignes

1.

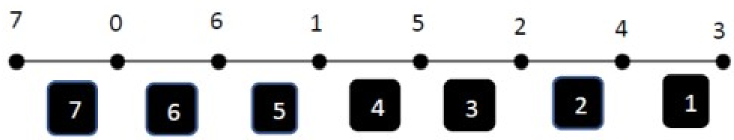
Étiquetage gracieux de L_5 :



Étiquetage gracieux de L_6 :

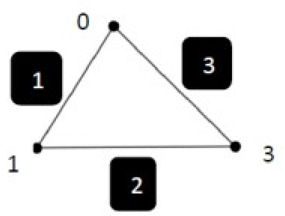
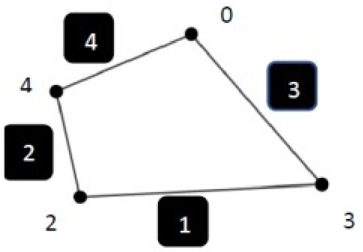
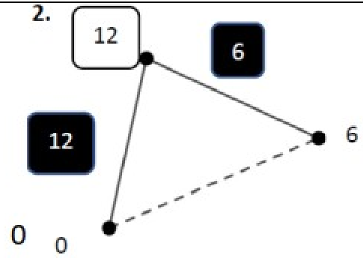


Étiquetage gracieux de L_7 :



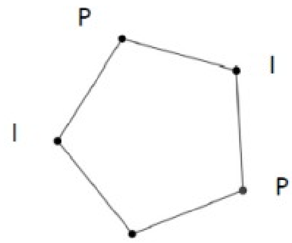
2. En s'appuyant sur la réflexion menée pour les figures L_4 et L_6, on peut étiqueter la figure $L_{2\,022}$ en associant aux points allant de la gauche vers la droite la suite de nombres :
0, 2 022, 1, 2 021, 2, 2 020, 3, 2 018, …, 1 021, 1 017, 1 014, 1012, 1011
Ce qui donne les pondérations successives, de la gauche vers la droite :
2 022, 2 021, 2 020, 2 019, 2 018, 2 017, 2 016, …, 4, 3, 2, 1.

C. Cas des polygones

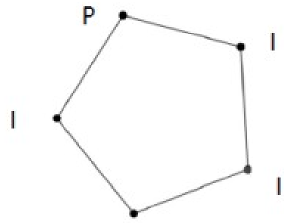
1. 		**2.** 
Étiquetage gracieux d'un triangle	Étiquetage gracieux d'un quadrilatère	Ajout à faire pour obtenir un étiquetage gracieux d'un polygone à 12 côtés.

3. Si les étiquettes des extrémités d'un segment sont ;
a. de parités différentes, alors la pondération du segment est impaire ;
b. de même parité, alors la pondération du segment est paire.
4. Un pentagone a cinq sommets pouvant être étiquetés par les nombres 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 (autant de nombres impairs que de nombres pairs, d'où une symétrie du problème par rapport à l'étiquetage P ou I) et reliés par cinq segments devant être pondérés par les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour que l'étiquetage soit gracieux. On doit donc avoir trois pondérations impaires (1, 3 et 5), ce qui nécessite trois alternances de nombres pairs et impairs pour les sommets associés. On a alors deux cas :

- on pondère à la suite trois segments par des nombres impairs et il reste un sommet placé entre deux sommets numérotés par des nombres de parités différentes.
Qu'elle soit paire ou impaire, la numérotation de ce sommet crée une nouvelle pondération impaire, ce qui en fait une de trop.



- on pondère à la suite deux segments pondérés par des nombres impairs puis un segment pondéré par un nombre pair. Il reste alors un sommet placé entre deux sommets numérotés par des nombres de même parité.
Qu'elle soit paire ou impaire, la numérotation de ce sommet crée soit deux nouvelles pondérations impaires soit deux nouvelles pondérations paires, ce qui ne convient pas.



Autre rédaction possible
Supposons par l'absurde qu'il existe un étiquetage gracieux. Quand on parcourt successivement les sommets du pentagone, on voit sur les arêtes les entiers de 1 à 5, donc trois nombres impairs, donc trois changements de parité du sommet, et deux nombres pairs, sans changement de parité. En tout, trois changements de parité, ce qui équivaut à un changement de parité quand on termine le parcours : contradiction.

D. Une très grande figure
1. Le nombre de segments est le nombre de paires de points distincts, c'est-à-dire la moitié du nombre de couples soit $\frac{1}{2} \times 2\,022 \times 2\,021 = 1\,011 \times 2\,021 = 2\,043\,231$.
2. a. On cherche le nombre d'entiers impairs de l'ensemble $\{1,2, \dots ,2\,043\,231\}$ ce qui revient à chercher les entiers k tels que $0 \leq 2k + 1 \leq 2\,043\,231$ soit $0 \leq k \leq 1\,021\,615$. On a donc $1\,021\,616$ segments dont la pondération est un nombre impair.
b. Si p est le nombre de points étiquetés avec un nombre pair, alors le nombre de points étiquetés avec un nombre impair est $2\,022 - p$. Le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair est donc égal au nombre de paires de points étiquetés l'un avec un nombre pair et l'autre un nombre impair soit $p(2\,022 - p)$.
3. Si K_{2022} est muni d'un étiquetage gracieux alors il existe un entier p tel que $p(2\,022 - p) = 1\,021\,616$
L'équation du second degré $p^2 - 2\,022p + 1\,021\,616 = 0$, dont le discriminant est 2020, n'a pas de solution entière.